数理解析研究所講究録
991巻 1997年 47-52

$GL(n,q)$と$SL(n,q)$の中間群におけるMcKay numbers

阪大理 鋤崎 英記 (Hideki Sukizaki)

有限群G, 素数p, 整数$k>0$, Gのp-block Bに対して, Bに属する既約通常指標で次数がpでちょうどk回割り切れるものの数を$m_p(k,G,B)$で表す.

$m_p(k,G)=\sum_B m_p(k,G,B)$はMcKay numberと呼ばれている.

有限体$GF(q)$上での, 次数nの一般線型群$GL(n,q)$の部分群L_kを次のように定める.

$$L_k=L_k(n,q)=\{x\in GL(n,q)\mid \det(x)\in U_k\}$$

ただし, U_kは$GF(q)$の乗法群の位数kなる部分群とする.

特に$L_{q-1}=GL(n,q)$, $L_1=SL(n,q)$であり, 一般に

$$GL(n,q)=L_{q-1}\supseteq L_k\supseteq L_1=SL(n,q)$$

となる.

ここでは$q=p^e$として$m_p(k,L_k,B)$について考える.

なお，$m_p(k, GL(n,q))$ は中村[N]，$m_p(k, GL(n,q), B)$ は Olsson-宇野[OU]で求められている。

L_k の p-block は defect 0 のものが k 個，defect $\frac{en(n-1)}{2}$ のものが $(q-1, nk)$ 個ある[D]，defect 0 の p-block は1個の既約指標しか持たず，その次数は $p^{\frac{en(n-1)}{2}}$ で割り切れる．

defect $\frac{en(n-1)}{2}$ の p-block は $U_{gcd(q-1,nk)}$ でパラメトライズできる．$a \in U_{gcd(q-1,nk)}$ に対応する p-block を B_a で表す．

このとき，次を得た．

定理1 [S]　$0 \le k \le \frac{n(n-1)}{2}$ ならば，

$$m_p(ek, L_k, B_a) = \sum{}' m(\mu, a)$$

ここで $\sum'$ は n の分割 $\mu = (a_1^{l_1}, a_2^{l_2}, \cdots, a_\delta^{l_\delta})$（但し，$a_1 > a_2 > \cdots > a_\delta$，$l_i$ は a_i の重複度）のうち，$\sum_i \binom{a_i}{2} l_i = k$ をみたすものについての和であり，

$m(\mu, a) =$

$$k\left\{ q^{l(\mu)-\delta(\mu)} + \sum_{g \mid gcd(t(\mu), \frac{q-1}{k})} g^2 \Pi(g)\, q^{\frac{l(\mu)}{g} - \delta(\mu)} \right\} (q-1)^{\delta(\mu)-2} \beta\left(\frac{(q-1)m(\mu)}{gcd(q-1, nk)}, S_0 a \right)$$

ただし，$l(\mu) = \sum_i l_i$，$\delta(\mu) = \delta$，$m(\mu) = gcd(a_1, a_2, \cdots, a_\delta)$，

$t(\mu)=\gcd(l_1,l_2,\cdots,l_g)$, $\quad s_0=(-1)^{\frac{(q-1)n}{\gcd(q-1,nh)}}$,

$\beta(m,a)$: GF(q)における $x^m=a$ の解の数

$$\Pi(g)=\prod_{r\mid g\text{なる素数}r}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)$$

証明は，Lehrer [L] による L_h の既約指標のパラメトライズを用いる.

例

(i) $n=6$, $h=2$, $\gcd(\frac{q-1}{h},6)=2$ のとき

defect 0 でない p-block の数は $\gcd(q-1,6h)=2h$. また $m_p(2e,L_h,B_a)=m(\mu,a)$ (但し $\mu=(2^2,1^2)$) となる.

このとき，$l(\mu)=4$, $g(\mu)=2$, $m(\mu)=1$, $t(\mu)=2$, また $\Pi(2)=\frac{3}{4}$ であるから，

$$\begin{aligned}m_p(2e,L_h,B_a)&=h(q^2+4\Pi(2))\beta\left(\frac{(q-1)\cdot 1}{\gcd(q-1,6h)},(-1)^{\frac{(q-1)\cdot 6}{\gcd(q-1,6h)}}a\right)\\&=h(q^2+3)\beta\left(\frac{q-1}{2h},(-1)^{3\frac{q-1}{h}}a\right)\\&=h(q^2+3)\frac{q-1}{2h}\end{aligned}$$

(ii) $h=0$ のときは，defect 0 でない p-block すべてが同数の指標をもつので，$m_p(0,L_h)$ を挙げる.

nが素数のとき

$$m_p(0,L_h)=\begin{cases} h(q^{n-1}+n^2-1) & \gcd(n,\frac{q-1}{h})=n \text{ のとき} \\ h\,q^{n-1} & \gcd(n,\frac{q-1}{h})=1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$n=4$ のとき

$$m_p(0,L_h)=\begin{cases} h(q^3+3q+12) & \gcd(4,\frac{q-1}{h})=4 \text{ のとき} \\ h(q^3+3q) & \gcd(4,\frac{q-1}{h})=2 \text{ のとき} \\ h\,q^3 & \gcd(4,\frac{q-1}{h})=1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$n=6$ のとき

$$m_p(0,L_h)=\begin{cases} h(q^5+3q^2+8q+24) & \gcd(6,\frac{q-1}{h})=6 \text{ のとき} \\ h(q^5+8q) & \gcd(6,\frac{q-1}{h})=3 \text{ のとき} \\ h(q^5+3q^2) & \gcd(6,\frac{q-1}{h})=2 \text{ のとき} \\ h\,q^5 & \gcd(6,\frac{q-1}{h})=1 \text{ のとき} \end{cases}$$

有限群 G の p-block B の defect を $d(B)$，B の defect 群を D とする．このとき，D の正規化群 $N_G(D)$ の p-block b で $b^G=B$ となるものが存在する（Brauer の第1主定理）。G, $N_G(D)$ の位数の p-成分を p^ν, $p^{\nu'}$ とすると，$\nu-d(B)=\nu'-d(b)$ である．

このとき，次のような予想がある．

予想 [Alperin - McKay 予想 [A]]

$m_p(\nu\text{-}d(B), G, B) = m_p(\nu'\text{-}d(b), N_G(D), b)$

が成り立つ.

$G = L_k$ の場合は, defect $\frac{en(n-1)}{2}$ の場合のみ考えればよい. L_k の defect $\frac{en(n-1)}{2}$ の p-block B に対して, defect群は Sylow p-部分群 P であり,

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \in L_k \right\}$$ とることができる. このとき.

$$N_{L_k}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix} \in L_k \right\}$$ となる (Borel部分群).

$N_{L_k}(P)$ の p-block b が $b^{L_k} = B$ となるただひとつの p-block であるとする. このとき

定理2 [S]　$m_p(0, L_k, B) = m_p(0, N_{L_k}(P), b)$

が成り立つ. 即ち, L_k は p が定義体の標数に等しいとき, Alperin-McKay予想が成り立つ.

(証明の概要) $m_p(0, L_k, B)$ は Lehrer [L] のパラメトライズを用いて数える.

一方, $N_{L_k}(P)$ が L_k の上三角行列のなす部分である. このとき, $N_{L_k}(P)$ の既約指標で次数が p で割り切れないものは,

その核に P の交換子群 P' を含む。したがって $N_{L_h}(P)/P'$ の既約指標を考えればよい。これについて，Clifford の定理を用いて $m_p(0, N_{L_h}(P), b)$ を数える.

[A] J.L.Alperin, The main problem of block theory, Proc. of Conf. on Finite Groups (Univ. Utah Park City, UT, 1975), Academic Press, New York, 1976.

[D] S.W.Dagger, On the block of chevalley groups, J.London Math.Soc. (2) 3 (1971), 21–29

[L] G.I.Lehrer, Character, Class, and Duality in Isogenous Groups, J.Algebra 36 (1975), 278–286.

[N] H.Nakamura, On some generating functions for McKay number—prime power divisibilities of the hook products of Young diagrams, J.Math.Sci.Uni.Tokyo 1 (1994), 321–337.

[S] H.Sukizaki, to appear.

[OU] J.B.Olsson and K.Uno, Dade conjecture for general linear groups in the defining characteristic, Proc.London Math. Soc. (3) 72 (1996), 359–384.